Incertitude due à l’interpolation sur une table de données numériques

FLORIAN PLATEL
www.metgen.org

1. Formulation mathématique du problème

Soient x_1 et x_2 deux réels. On note f, la fonction traduisant le phénomène physique que l’on étudie. Celle-ci est supposée continue sur $[x_1, x_2]$. Cette fonction n’est connue que de manière discrète aux points x_1 et x_2 par le tableau 1.

x	$f(x)$
x_1	y_1
x_2	y_2

Tableau 1
Table d’étalonnage donnant f

Dans le cas le plus général, l’on a construit cette table à partir de plusieurs expériences : on a généré plusieurs valeurs de x_i , $i \in \{1, 2\}$ et l’on a mesuré les valeurs de y_i correspondantes. Ainsi, x_i (resp. y_i) est affectée de l’incertitude $I(x_i)$ (resp. $I(y_i)$).

Posons :

$$P_i = [x_i - I(x_i), x_i + I(x_i)] \times [y_i - I(y_i), y_i + I(y_i)] \quad ,$$

avec $i \in \{1, 2\}$.

En notant $\mathscr{F}$ l’ensemble des fonctions continues passant par les pavés P_1 et P_2, il vient alors, $f \in \mathscr{F}$ (fig. 1).

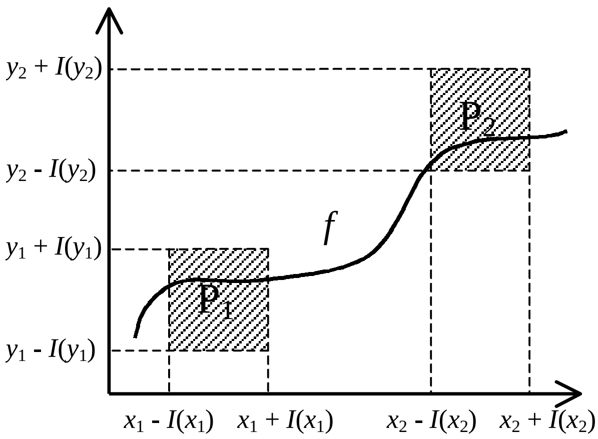

Fig. 1. - Exemple de fonction passant par P_1 et P_2

2. Interpolation linéaire

Soient Δ la droite passant par les points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) et $x \in [x_1, x_2]$. On suppose d’autre part que x est affectée de l’incertitude $I(x)$.

Posons :

$$\theta_x = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad . \tag{1}$$

Dans ces conditions , la valeur interpolée est :

$$y = \theta_x \cdot (y_2 - y_1) + y_1 \quad . \tag{2}$$

2.1. Calcul de l'incertitude type sur y

En supposant les variables de l'équation (2) non corrélées, l'incertitude type sur y est calculée par la loi de propagation des variances :

$$u^2(y) = \left(\frac{\partial y}{\partial \theta_x}\right)^2 \cdot u^2(\theta_x) + \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial y}{\partial y_i}\right)^2 \cdot u^2(y_i) \quad ,$$

ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} u^2(y) &= (y_2 - y_1)^2 \cdot u^2(\theta_x) \\ &\quad + (1-\theta_x)^2 \cdot u^2(y_1) + \theta_x^2 \cdot u^2(y_2) \end{aligned} \quad . \qquad (3)$$

2.2. Calcul de l'incertitude type sur θ_x

En supposant les variables de l'équation (1) non corrélées, l'incertitude type sur y est calculée par la loi de propagation des variances :

$$u^2(\theta_x) = \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x}\right)^2 \cdot u^2(x) + \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x_i}\right)^2 \cdot u^2(x_i) \quad ,$$

ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} u^2(\theta_x) = \frac{1}{(x_2 - x_1)^2} \cdot \Big[u^2(x) & \\ &+ (1-\theta_x)^2 \cdot u^2(x_1) \\ &+ \theta_x^2 \cdot u^2(x_2) \Big] \end{aligned} \quad . \qquad (4)$$

2.3. Simplification des expressions

2.3.1. Simplification de u(y)

En posant : $u_m(y_i) = \text{Max}\ \{u(y_1)\ ;\ u(y_2)\}$,
il vient d'après l'expression (3) :

$$u^2(y) \le \left\{(1-\theta_x)^2 + \theta_x^2\right\} \cdot u_m^2(y_i) + (y_2 - y_1)^2 \cdot u^2(\theta_x)$$

Puisque $\theta_x \in [0, 1]$, il vient $(1-\theta_x)^2 + \theta_x^2 \le 1$, et donc : $u^2(y) \ \le\ u_m^2(y_i) + (y_2 - y_1)^2 \cdot u^2(\theta_x)$.

En posant $P_y = y_2 - y_1$, le « pas selon y », l'expression précédente s'écrit :

$$u^2(y) \ \le\ u_m^2(y_i) + P_y^2 \cdot u^2(\theta_x) \quad . \qquad (5)$$

2.3.2. Simplification de u(θ_x)

En posant : $u_m(x_i) = \text{Max}\ \{u(x_1)\ ;\ u(x_2)\}$,
il vient d'après l'expression (4) :

$$u^2(\theta_x) \le \frac{1}{(x_2 - x_1)^2} \cdot \left\{\left((1-\theta_x)^2 + \theta_x^2\right) \cdot u_m^2(x_i) + u^2(x) \right\}$$

Puisque $\theta_x \in [0, 1]$, on a $(1-\theta_x)^2 + \theta_x^2 \le 1$, et donc : $u^2(\theta_x) \le \dfrac{1}{(x_2 - x_1)^2} \cdot \left\{u_m^2(x_i) + u^2(x)\right\}$.

En posant $P_x = x_2 - x_1$, le « pas selon x », l'expression précédente s'écrit :

$$u^2(\theta_x) \le \frac{1}{P_x^2} \cdot \left(u_m^2(x_i) + u^2(x)\right) \quad . \qquad (6)$$

2.4. Expression finale du résultat

En combinant (5) et (6), il vient :

$$u^2(y) \ \le\ u_m^2(y_i) + \left(\frac{P_y}{P_x}\right)^2 \cdot \left(u_m^2(x_i) + u^2(x)\right) . \qquad (7)$$

Résultat n° 1 :

L'incertitude type liée à l'interpolation linéaire est majorée de la façon suivante :

$$u^2(y) \ \le\ u_m^2(y_i) + \left(\frac{P_y}{P_x}\right)^2 \cdot \left(u_m^2(x_i) + u^2(x)\right) \ ,$$

avec :
$u_m(x_i) = \text{Max}\ \{u(x_1)\ ;\ u(x_2)\}$;
$u_m(y_i) = \text{Max}\ \{u(y_1)\ ;\ u(y_2)\}$;
$P_x = x_2 - x_1$;
$P_y = y_2 - y_1$.

3. Incertitude due à l'assimilation à une droite

L'assimilation de la fonction f à la droite Δ introduit une erreur. La fonction n'étant connue que de manière discrète, il n'est en principe pas possible de déterminer directement l'erreur. Néanmoins, on peut quand même la majorer.

3.1. Existence d'un majorant

Soit φ l'équation de la droite Δ. Pour $x \in [x_1,\ x_2]$, on définit $\delta(x) = \varphi(x) - f(x)$ qui est la fonction donnant l'erreur commise en assimilant f à la droite Δ.

Par hypothèse, la fonction δ étant continue sur l'intervalle $[x_1,\ x_2]$ qui est un compact de $\mathbb{R}$, on déduit que $\delta([x_1,\ x_2])$ est aussi un compact de $\mathbb{R}$: ce qui signifie qu'il existe $c \in [x_1,\ x_2]$ tel que $\forall\ x \in [x_1, x_2] \quad \delta(x) \le \delta(c)$.

3.2. Calcul d'un majorant

En conservant les notations précédentes, l'on obtient $\delta'(c) = 0$. Posons $\varphi(x) = K \cdot (x - x_1) + f(x_1)$, avec $K = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Il vient alors $f'(c) = K$.

Soit : $x \in [x_1, x_2]$. Par hypothèse, f est de classe C^2 sur $[x_1, x_2]$ et dérivable à l'ordre 3 sur $]x_1, x_2[$. La formule de Lagrange appliquée entre x et x_1 conduit à dire qu'il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que :

$$f(x_1) = f(x) + (x_1 - x)\cdot f'(x) + \frac{(x_1 - x)^2}{2}\cdot f''(x_1 + \theta\cdot(x_1 - x)) \quad .$$

On a alors successivement :

$$\delta(x) = K\cdot(x - x_1) + f(x_1) - f(x_1) - (x - x_1)\cdot f'(x) + \frac{(x - x_1)^2}{2}\cdot f''(x_1 + \theta\cdot(x_1 - x))$$

puis :

$$\delta(x) = (x - x_1)\cdot\left[K - f'(x) + \frac{(x - x_1)}{2}\cdot f''(x_1 + \theta\cdot(x_1 - x))\right] \quad .$$

Cette formule appliquée à $x = c$ conduit à dire qu'il existe $\theta_1 \in]0, 1[$ tel que :

$$\delta(c) = \frac{(c - x_1)^2}{2}\cdot f''(x_1 + \theta_1\cdot(x_1 - c)) \quad ,$$

et donc :

$$|\delta(c)| \le \frac{(c - x_1)^2}{2}\cdot \underset{[x_1, x_2]}{\mathrm{Sup}} |f''| \quad .$$

Comme $\delta(c)$ est un majorant de δ sur $[x_1, x_2]$:

$$\forall\, x \in [x_1, x_2] \quad |\delta(x)| \le \frac{(c - x_1)^2}{2}\cdot \underset{[x_1, x_2]}{\mathrm{Sup}} |f''| \quad . \qquad (8)$$

De même en remplaçant x_1 par x_2 dans la démonstration précédente, on trouve :

$$\forall\, x \in [x_1, x_2] \quad |\delta(x)| \le \frac{(c - x_2)^2}{2}\cdot \underset{[x_1, x_2]}{\mathrm{Sup}} |f''| \quad . \qquad (9)$$

En multipliant membre à membre les inéquations (8) et (9), l'on obtient :

$$\forall\, x \in [x_1, x_2] \quad [\delta(x)]^2 \le \frac{[(c - x_1)\cdot(c - x_2)]^2}{4}\cdot\left(\underset{[x_1, x_2]}{\mathrm{Sup}} |f''|\right)^2 \quad .$$

Sur l'intervalle $[x_1, x_2]$, la fonction $[(c - x_1)\ (c - x_2)]^2$ est maximale pour $c = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ et vaut $\dfrac{(x_2 - x_1)^4}{16}$.

Donc :

$$\forall\, x \in [x_1, x_2] \quad \delta(x) \le \frac{P_x^2}{8}\cdot \underset{[x_1, x_2]}{\mathrm{Sup}} |f''| \quad .$$

Résultat n° 2 :

La valeur absolue de l'erreur commise en assimilant f à la droite Δ sur l'intervalle $[x_1, x_2]$ est majorée par :

$$M = \frac{P_x^2}{8}\cdot \underset{[x_1, x_2]}{\mathrm{Sup}} |f''| \quad .$$

Remarque : la principale difficulté est maintenant de majorer $|f''|$. Dans le cas le plus général, on ne peut qu'évaluer f'' à partir de trois couples d'observations (x_i, y_i).

3.3. Calcul d'un majorant de |f''|

A ce stade, on fait l'hypothèse que f peut être modélisée par un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré 2.

Remarque : pour un intervalle suffisamment « petit », cette hypothèse semble légitime.

Soient $p \in \mathbb{R}^2[X]$ et $E = \{(x_i, y_i),\ i \in \{1 ; 2 ; 3\}\}$ le graphe de la fonction f. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note :
$p(x) = a_0 + a_1\cdot x + a_2\cdot x^2$. Le triplet (a_0, a_1, a_2) vérifie le système d'équations :

$$\begin{cases} y_1 = a_0 + a_1\cdot x_1 + a_2\cdot x_1^2 \\ y_2 = a_0 + a_1\cdot x_2 + a_2\cdot x_2^2 \\ y_3 = a_0 + a_1\cdot x_3 + a_2\cdot x_3^2 \end{cases} \quad .$$

Posons :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} \quad .$$

Avec ces notations $a_2 = \Delta_2 / \Delta$. Déjà Δ est un déterminant de Vandermonde d'ordre 3 et vaut : $\Delta = (x_3 - x_2)\cdot(x_3 - x_1)\cdot(x_2 - x_1)$. On calcule ensuite Δ_2 par la règle de Sarrus :
$\Delta_2 = (x_2 - x_1)\cdot y_3 + (x_1 - x_3)\cdot y_2 + (x_3 - x_2)\cdot y_1$.

On en déduit :

$$a_2 = \frac{(x_2 - x_1)\cdot y_3 + (x_1 - x_3)\cdot y_2 + (x_3 - x_2)\cdot y_1}{(x_3 - x_2)\cdot(x_3 - x_1)\cdot(x_2 - x_1)} \quad .$$

Comme $p''(x) = 2 \cdot a_2$, on retiendra :

$$\left| f'' \right| = 2 \cdot \left| a_2 \right| \quad . \qquad (11)$$

Résultat n° 3 :

La valeur absolue de l'erreur commise en assimilant f à la droite D sur l'intervalle $[x_1, x_2]$ est majorée par :

$$M = \frac{P_x^2}{4} \cdot \left| a_2 \right| \ ,$$

avec :

$$a_2 = \frac{(x_2 - x_1) \cdot y_3 + (x_1 - x_3) \cdot y_2 + (x_3 - x_2) \cdot y_1}{(x_3 - x_2) \cdot (x_3 - x_1) \cdot (x_2 - x_1)}$$

et : (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) les points d'étalonnage donnant la fonction f.

3.4. Calcul de l'incertitude type

A priori, toute valeur de l'erreur est équiprobable, ce qui conduit à considérer une distribution rectangulaire de variance :

$$v = \frac{(2 \cdot M)^2}{12} \quad ,$$

d'où :

$$u_{droite} = \frac{P_\mathrm{x}^2 \cdot \left| a_2 \right|}{4 \cdot \sqrt{3}} \quad . \qquad (12)$$

4. Résultat final

D'après (7) et (12) :

$$u^2 = u_\mathrm{m}^2(y_i) + \left(\frac{P_\mathrm{y}}{P_\mathrm{x}} \right)^2 \cdot \left(u_\mathrm{m}^2(x_\mathrm{i}) + u^2(x) \right) + \frac{P_\mathrm{x}^4 \cdot a_2^2}{48} \quad .$$

C'est à dire :

$$u = \sqrt{u_\mathrm{m}^2(y_i) + \left(\frac{P_\mathrm{y}}{P_\mathrm{x}} \right)^2 \cdot \left(u_\mathrm{m}^2(x_\mathrm{i}) + u^2(x) \right) + \frac{P_\mathrm{x}^4 \cdot a_2^2}{48}} \quad .$$

5. Application numérique

Soit à mesurer la température en un point d'un bain thermostatique. Pour ce faire, on utilise le thermomètre numérique de résolution 0,001 °C dont on a reproduit sur le tableau 2 le relevé de mesures extrait de son certificat d'étalonnage.

Valeur lue (*L*) °C	Valeur étalon (*T*) °C	Correction (*C*) °C	Incertitude (sur *C*) °C	Immer-sion mm
-80,173	-80,129	0,044	0,009	380
-0,055	0,000	0,055	0,005	380
100,010	100,102	0,092	0,011	380
199,854	199,988	0,133	0,011	380
298,117	298,307	0,190	0,016	380
399,017	399,264	0,246	0,017	380

Tableau 2

Table d'étalonnage du thermomètre

L'indication brute du thermomètre a pour valeur moyenne 50,203 °C et pour écart type expérimental 0,003 °C.

D'autre part, d'après le rapport de caractérisation, l'écart type expérimental du thermomètre à 0 °C vaut 0,002 °C et 0,004 °C à 100 °C.

Remarque : on voit bien à ce stade l'intérêt d'effectuer l'étalonna ge de ses instruments de mesure en interne puisque l'on dispose alors de la répétabilité aux points d'étalonnage. Cette information n'est en général pas contenue dans le certificat d'étalonnage, et pourtant, elle est nécessaire pour pouvoir l'exploiter en dehors des points d'étalonnage …

Quelle est la correction c a appliquer au thermomètre ?
Quelle est l'incertitude type $u(c)$ associée ?

En suivant le mode opératoire figurant en annexe 1, on trouve :

$$c = 0{,}074\ °\mathrm{C} \ \text{ et } \ u(c) = \pm\ 0{,}005\ 8\ °\mathrm{C} \ .$$

Annexe 1

Mode opératoire — Calcul d'une correction d'étalonnage et de son incertitude

On a la table d'étalonnage suivante (donnée issue du certificat d'étalonnage) :

Valeur appareil	Valeur étalon	Correction	Incertitude
x_1	y_1	c_1	I_1
x_2	y_2	c_2	I_2
x_3	y_3	c_3	I_3

L'appareil mesure x (compris entre x_1 et x_2). L'écart type expérimental sur x vaut $S(x)$.
La résolution de l'appareil est notée r.

Remarque : certains appareils peuvent changer automatiquement de résolution en fonction des valeurs mesurées. Si un changement se produit entre les points (x_1, x_2, x_3) la méthode ne pourra pas être appliquée car a priori la fonction définie par $c_i = f(x_i)$ n'est pas continue.

1. Calcul des incertitudes élémentaires :

1.1. **L'incertitude type sur c_1** notée $u(c_1)$ est obtenue à partir de l'incertitude donnée dans le certificat d'étalonnage. Cette dernière ayant été calculée en prenant un coefficient d'élargissement $k = 2$, on obtient $u(c_1)$ en divisant I_1 par deux : $u(c_1) = I_1 / 2$

1.2. **L'incertitude type sur c_2** notée $u(c_2)$ est obtenue à partir de l'incertitude donnée dans le certificat d'étalonnage. Cette dernière ayant été calculée en prenant un coefficient d'élargissement $k = 2$, on obtient $u(c_2)$ en divisant I_2 par deux : $u(c_2) = I_2 / 2$

1.3. **L'incertitude type sur x_1** notée $u(x_1)$ est obtenue à partir de la résolution et d'une répétabilité effectuée à la valeur x_1 qui vaut $S(x_1)$:

$$u(x_1) = \sqrt{\frac{r^2}{12} + S^2(x_1)}$$

1.4. **L'incertitude type sur x_2** notée $u(x_2)$ est obtenue à partir de la résolution et d'une répétabilité effectuée à la valeur x_2 qui vaut $S(x_2)$:

$$u(x_2) = \sqrt{\frac{r^2}{12} + S^2(x_2)}$$

1.5. **L'incertitude type sur x** notée $u(x)$ est obtenue à partir de la résolution et de l'écart type expérimentale $S(x)$ et vaut :

$$u(x) = \sqrt{\frac{r^2}{12} + S^2(x)}$$

1.6. $u_m(c_i) = \text{Max}\ \{\ u(c_1), u(c_2)\ \}$ et $u_m(x_i) = \text{Max}\ \{\ u(x_1), u(x_2)\ \}$

1.7. $P_x = x_2 - x_1$ et $P_c = c_2 - c_1$

1.8. $$a_2 = \frac{(x_2 - x_1)\cdot c_3 + (x_1 - x_3)\cdot c_2 + (x_3 - x_2)\cdot c_1}{(x_3 - x_2)\cdot(x_3 - x_1)\cdot(x_2 - x_1)}$$

2. Résultats

2.1. **La correction à ajouter à la valeur x** est : $c = \frac{P_c}{P_x}\cdot(x - x_1) + c_1$

2.2. **L'incertitude type sur la correction** est : $u(c) = \sqrt{u_m^2(c_i) + \left(\frac{P_c}{P_x}\right)^2 \cdot \left(u_m^2(x_i) + u^2(x)\right) + \frac{P_x^4 \cdot a_2^2}{48}}$

Annexe 2

Mode opératoire — Fiche de calcul

Fiche de calcul N°

Correction d'étalonnage

1. Informations générales

N° étalon :		Certificat d'étalonnage N° :	
Unité :		Date :	
		Rapport de caractérisation N° :	
		Date :	

2. Données d'étalonnage

2.2. Points utilisés pour l'interpolation (issus du certificat d'étalonnage)

Point n°	Valeur lue	Valeur étalon	Correction	Incertitude
1				
2				

2.3. Point supplémentaire (issu du certificat d'étalonnage)

Point n°	Valeur lue	Valeur étalon	Correction
3			

3. Informations complémentaires sur l'étalon

3.1. Résolution de l'étalon r =

3.2. Ecarts types de l'étalon (issus du rapport de caractérisation)

Au point n° 1	S =	
Au point n° 2	S =	

4. Valeur mesurée par l'étalon

Mesure	x =	
Ecart type	S =	

5. Résultat

5.1. Calculs intermédiaires

$u(c_1)$ =		$u(c_2)$ =	
$u(x_1)$ =		$u(x_2)$ =	
$u_m(c_i)$ =		$u_m(x_i)$ =	
P_x =		P_c =	
$u(x)$ =		a_2 =	

5.2. Résultat final

Correction	c =	
Incertitude type	$u(c)$ =	